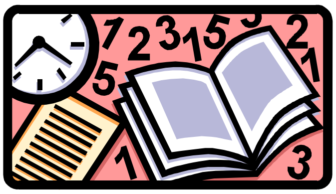
Name:



Mathematatik-Dossier

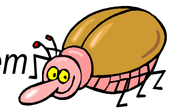
Die lineare Funktion

Inhalt:

- **Lineare Funktion**
- **Lösen von Gleichungssystemen und schneiden von Geraden**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Die lineare Funktion

Jede Maschine die du kennst, vor allem der Computer, arbeitet eigentlich wie eine Funktion. Er erhält eine Eingabe, macht dann irgendwas damit und spuckt ein Ergebnis aus. Wenn du also eine Eingabe machst, wird nach der bestimmten Aufgabe (oder eben der Funktion) der Maschine dieser Eingabe ein Ergebnis zugeordnet, das nur genau zu der gemachten Eingabe passt. So siehst du zum Beispiel auf dem Bildschirm immer ein „p" wenn du auf der Tastatur die entsprechende Taste drückst, und immer ein „t" wenn du auf „t" drückst. Jeder Eingabe wird also ein ganz bestimmtes Ergebnis zugeordnet.

f:	**x**	$\longrightarrow$	**y**
Funktion	x-Koordinate	ordnet jedem x genau ein y zu	y- Koordinate als Term von x
(Maschinenname)	Eingabe	Zuordnungsregel	Ergebnis/Resultat

<u>Die Zuordnungsregel kann man als „Funktionsgleichung" schreiben, wobei y als Term (Rechnung) von x geschrieben wird.</u>

Eingabe (x)

y = **x** - 1
y = **2x** + 7

Maschine, welche die Zuordnungsregel enthält.

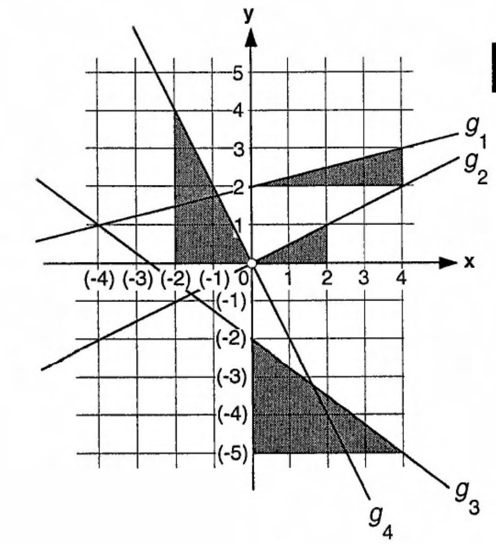
Ausgabe(y)

Die Funktion ist also eine Maschine, die jedem x-Wert (Original) genau einen y-Wert (Bild) zuordnet.

Funktionen können auf verschiedene Arten dargestellt werden. Man verwendet dazu entweder die graphische Darstellung (Graph der Funktion) oder die Wertetabelle (welche einfach jedem x sein y gegenüberstellt).

1.1 Graph der Funktion

Bei dieser Darstellungsart ist die Steigung der Geraden ein wichtiger Bestandteil der Funktion.



Steigung: $a := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Die Steigung kann jetzt auch **negativ** sein.

Es ist unerheblich, welche Punkte im **Steigungsdreieck** als P_1 und als P_2 bezeichnet werden.

$$a_1 = \frac{3-2}{4-0} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$a_2 = \frac{1-0}{2-0} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \frac{(-2)-(-5)}{0-4} = \mathbf{(-\frac{3}{4})}$$

$$a_4 = \frac{4-0}{(-2)-0} = \mathbf{(-2)}$$

Bestimmen der Steigung (Herauslesen aus der Grafik):
Von einem Punkt aus bis zu einem nächsten Punkt zählen: (*nimm mit Vorteil Punkte, die auf den Gitterlinien liegen)*

$$a = \frac{\text{Wandern in y-Richtung}}{\text{Wandern in x-Richtung}}$$

Vorzeichen:
\+ für Wandern in Achsenrichtung

– für Wandern entgegen Achsenrichtung

Die **Funktionsgleichung** beinhaltet neben der Steigung (a) auch den sog. **y-Achsenabschnitt** (**b**). Beide Angaben zusammen ermöglichen uns das Zeichnen / Herauslesen der entsprechenden Funktion.

Funktionsgleichung

g_1: $y = \frac{1}{4}x + 2$

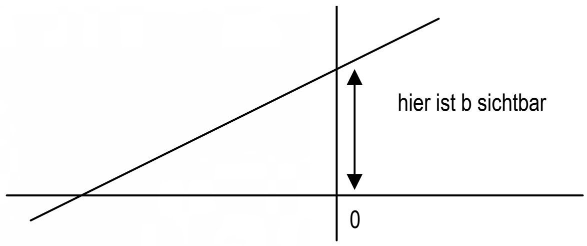
g_2: $y = \frac{1}{2}x$

g_3: $y = (-\frac{3}{4})x - 2$

g_4: $y = (-2)x$

$x \rightarrow y = ax + b$

a: Steigung   b: y-Achsenabschnitt



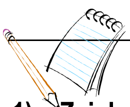
Bestimmen des Achsenabschnittes:
Betrachte die y-Achse. Die Funktionsgerade schneidet diese y-Achse an irgendeinem Punkt. Wenn du herausliest, welche y-Koordinate dieser Punkt hat, hast du den Achsenabschnitt schon gefunden.

b = y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse

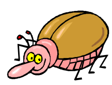
Vorzeichen (oder einfach das Vorzeichen der y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse):
+ Schnittpunkt oberhalb dem Nullpunkt
- Schnittpunkt unterhalb Nullpunkt

➔ **Wenn du also die Funktionsgleichung kennst, kannst du die Gerade einzeichnen**. (Mit Hilfe des Achsenabschnittes den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse einzeichnen, dann von diesem Punkt aus die Steigung abtragen, fertig.)

➔ **Kennst du nur die Steigung und einen Punkt, geht das auch**. Vom Punkt aus die Steigung abtragen.

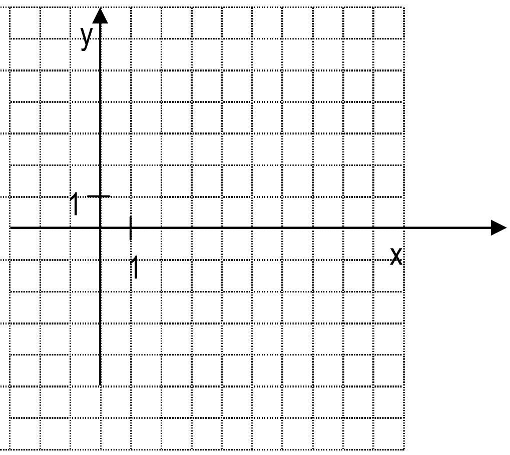


Aufgaben „Graph der Funktion – Lineare Funktion"

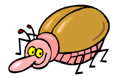


1) Zeichne im Koordinatensystem die Punkte A(0/0); B(1/2); C(2/1); D(5/–1).

a) Zeichne die Verbindungsgerade der Punkte AB und diejenige der Punkte CD
b) Welche Steigung haben die beiden Geraden AB und CD?
c) Bestimme den y-Achsenabschnitt beider Geraden.
d) Wie heissen die beiden Funktionsgleichungen?



2) Gegeben ist im Koordinatensystem der Punkt A (2/3)

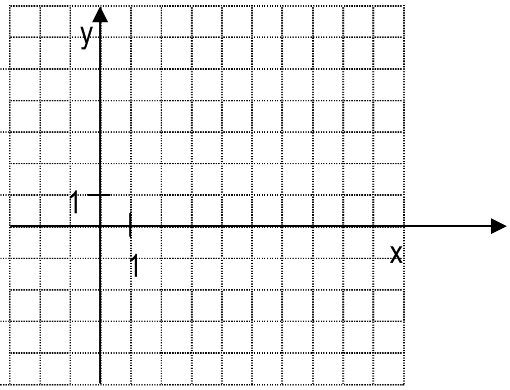


a) Zeichne eine Gerade g_1, welche durch A geht und die Steigung ($-\frac{2}{3}$) hat.

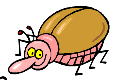
b) Zeichne eine Gerade g_2, welche durch A geht und die Steigung 3 hat.

c) Die Gerade g_3 geht ebenfalls durch A. In der Funktionsgleichung ist der y-Achsenabschnitt = -1. Zeichne die Gerade ein.

d) Notiere die Funktionsgleichungen der Geraden g_1, g_2, g_3.

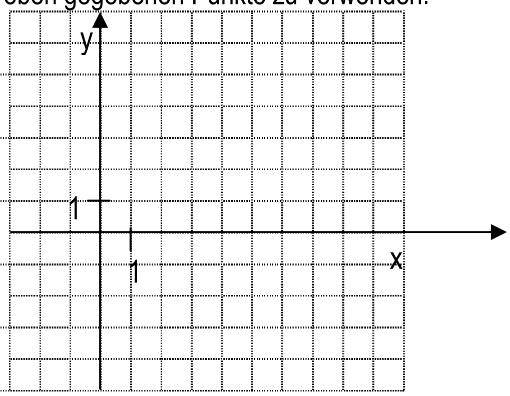


3) Gegeben ist die Funktion x → y = (-3x) - 1



a) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Geraden und erfüllen damit die Funktionsgleichung?
A(0/0), B((-1)/3), C(3/(-10)); D ((-2)/7); E(1/(-4))

b) Zeichne die Gerade ins Koordinatensystem ein, ohne einen der oben gegebenen Punkte zu verwenden.

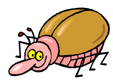


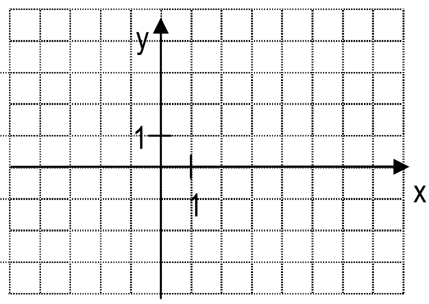
4) Gegeben ist die Funktion x → y = 0.5x + 2

a) Skizziere den Graphen dieser Funktion im Koordinatensystem

b) Wie gross ist die Steigung?

c) Wie gross ist der y-Achsenabschnitt?

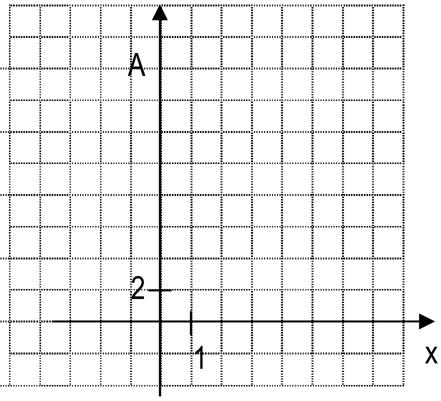




5) Gegeben ist ein Rechteck mit der Höhe h=4cm

a) Zeichne im Koordinatensystem ein, wie sich die Fläche A verändert, wenn die Breite x der Reihe nach 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm beträgt.

b) Welche Funktionsgleichung kannst du aufschreiben, die dir aus der Breite die Fläche liefert? (Also in der Form x → A = ax + b)

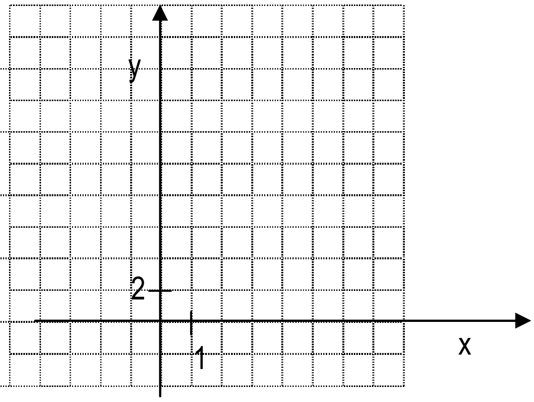


6) Gegeben ist ein Rechteck mit der Fläche A = 20cm²

a) Zeichne im Koordinatensystem ein, wie sich die Höhe y verändert, wenn die Breite x der Reihe nach 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm beträgt.

b) Welche Funktionsgleichung kannst du aufschreiben, die dir aus der Breite die Höhe liefert?

c) Was stellst du fest?



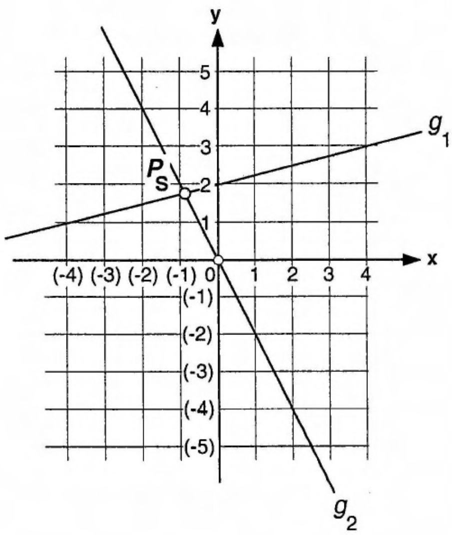
Fragen / Bemerkungen:

2. Gleichungssysteme – Schnittpunkte zweier Geraden

Wenn sich im Koordinatensystem zwei Geraden schneiden, so kann man ohne grosse Problem feststellen, dass dieser Schnittpunkt natürlich Element ist von beiden Geraden (auf beiden Geraden enthalten ist). Zudem hat der Schnittpunkt auch noch die besondere Eigenschaft, dass die x- und die y-Koordinate klar bestimmbar sind. Somit ist der Schnittpunkt von zwei Geraden also jener Punkt, welcher in beiden Funktionsgleichungen für die genau gleiche x-Koordinate (Eingabe) auch das genau gleiche Ergebnis (Resultat, y-Koordinate) liefert.

> ➔ *Der Schnittpunkt kann also so verstanden werden, dass er sowohl die Funktionsgleichung der ersten Gerade, als auch die Funktionsgleichung der zweiten Gerade erfüllt (also bei beiden Funktionsgleichungen für ein ganz bestimmtes x auch das gleiche y herauskommt.)*

Genau diese Eigenschaft macht man sich zu Nutze, wenn man zwei Geraden miteinander schneidet (rsp. von zwei Gleichungen eine gemeinsame Lösung sucht.)



Schnittpunkt zweier Geraden

g_1: $y = \boxed{\frac{1}{4}x + 2}$

g_2: $y = (-2)x$

P_S : gleiche y-Werte der beiden Geraden — die y werden somit gleich gesetzt.

$$\boxed{\frac{1}{4}x + 2} = (-2)x$$

$$x = \left(-\frac{8}{9}\right)$$

x-Wert in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen:

$$y = \frac{16}{9}$$

$$P_S\left(\left(-\frac{8}{9}\right) / \frac{16}{9}\right)$$

Für die Auflösung von Gleichungssystemen (mehr als eine Gleichung, in unserem Beispiel jeweils zwei Gleichungen, welche mit den gleichen Variablen funktionieren) gibt es mehrere Methoden.

a) <u>Das Gleichsetzungsverfahren (wird v.a. beim Schneiden von zwei Geraden angewendet)</u>

Folgende Geraden sind gegeben: $\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + 2 \\ y = (-2)x \end{array} \right|$ *Beachte, dass hier beide Male steht „y = "*

Sucht man jetzt also den Schnittpunkt, ist die Überlegung die Folgende: Der Schnittpunkt liegt auf beiden Geraden. Somit kann ich der ersten Geraden entlang wandern, um zum Schnittpunkt zu gelangen. Ich kann aber auch der zweiten Geraden entlang wandern. Anders gesagt: Ob ich mit der ersten Geradengleichung oder mit der zweiten Geradengleichung rechne, ist egal. Der Schnittpunkt hat beide Male das gleiche x und das gleiche y.

→ Gleichsetzung der Funktionsgleichungen.

Sofern auf der einen Seite des „ = " in beiden Gleichungen das Selbe steht (hier „y="), kann ich die beiden Geraden einfach gleich setzen und schreiben

entspricht y aus Gleichung 1		entspricht y aus Gleichung 2	
$\frac{1}{4}x + 2$	=	$(-2)x$	¦¦ • HN (4)
$x + 8$	=	$(-8)x$	¦¦ - x
8	=	$-9x$	¦¦ : - 9
$\left(-\frac{8}{9}\right)$	=	x	

→ Die x – Koordinate ist also $\left(-\frac{8}{9}\right)$

Zum Berechnen der y-Koordinate muss jetzt die x-Koordinate in eine der beiden Gleichungen eingesetzt werden. Statt x schreibt man dann also den Wert, den man eben berechnet hat.

Das ausgerechnete x an Stelle der Variablen einsetzen

→entweder $\frac{1}{4} \bullet \mathbf{(-\frac{8}{9})} + 2 = y$ oder $(-2) \bullet \mathbf{(-\frac{8}{9})} = y$

$-\frac{8}{36} + 2 = y$ $\qquad \frac{16}{9} = y$

$\frac{16}{9} = y$ (gekürzt!)

➔ **Die y- Koordinate ist also $\mathbf{\frac{16}{9}}$.**

➔ **Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $\mathbf{(-\frac{8}{9} \,/\, \frac{16}{9})}$**

b) Das Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren ist so etwas wie eine kleine „Maskerade". Und zwar geht es darum, dass eine Variable, z.B. y nichts anderes ist, als ein „verkleideter" Term von x. Die Bezeichnung y und der Term von x sind also genau gleich bedeutend. Somit kann dies im Gleichungssystem genutzt werden, indem man in der einen Gleichung die Verkleidung berechnet (z.B. y = ...) und anstelle der Verkleidung den Term von x in der zweiten Gleichung einsetzt. Das alles tönt jetzt eher kompliziert, darum zwei Beispiele:

Beispiel 1:

$$\left| \begin{array}{ll} 11x + y & = 36 \\ (-8x) + 9y & = (-211) \end{array} \right|$$

Aus dieser Gleichung möchten wir die „Verkleidung" von y herausfinden!

➔ Aus der ersten Gleichung folgt (durch beidseitiges subtrahieren von 11x) :

$y = 36 - 11x$

Die Variable y ist also gleichwertig mit dem Ausdruck 36 - 11x. Dies nützen wir aus und setzen jetzt in der zweiten Gleichung anstelle von y den gleichwertigen Ausdruck ein und haben nur noch eine Variable in der Gleichung.

➔ Anstelle von (-8x) + 9y = (-211) schreiben wir also

Das y aus Gleichung 1 (nach der Umformung zu y = 36 – 11x)

(-8x) + 9 **(36-11x)**	= (-211)	¦¦ vereinfachen
(-8x) + 324 – 99x	= (-211)	¦¦ vereinfachen
324 – 107x	= (-211)	¦¦ -324
- 107x	= (-535)	¦¦ : (-107)
x	= 5	➔ **x ist also 5.**

Dieses Ergebnis setzen wir jetzt wieder in einer der ursprünglichen Gleichungen oder im Ausdruck für y ein, um y zu berechnen.

Das ausgerechnete x anstelle der Variablen einsetzen

Also:	11 • **5** + y	= 36	oder (einfacher)	y = 36 – 11 • **5**
	55 + y	= 36		y = 36 - 55
	y	= 36 – 55		y = -19
	y	= -19		➔ **y ist also (-19)**

Lösungsmenge 𝕃 = {5 / -19} *(in der Lösungsmenge steht immer zuerst x, dann y, denn es ist ja ein Schnittpunkt mit den Koordinaten (x /y)*

Beispiel 2:

$$\left| \begin{array}{ll} 5x + 6y & = 9 \\ 4x + 3y & = 0 \end{array} \right|$$

→ Es bietet sich in diesem Fall keine „einfache“ Lösung an. **Wir müssen mit einem Trick eine bessere Ausgangslage schaffen**. So können wir eine einzelne **Gleichung** bedenkenlos **beidseitig multiplizieren**, um die **Koeffizienten** (das sind die Faktoren vor x, rsp. vor y) zu **verändern**.

Das Ziel hier wird sein, gleiche Koeffizienten vor x zu schaffen (dazu können wir z.B. das kgV von 4 und 5 verwenden)

$$\left| \begin{array}{ll} 5x + 6y & = 9 \\ 4x + 3y & = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \bullet 4 \rightarrow \\ \bullet 5 \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ll} 20x + 24y & = 36 \\ 20x + 15y & = 0 \end{array} \right|$$

Aus der oberen Gleichung sehen wir die „Verkleidung“ von 20x, nämlich 20x = 36 – 24y.

➔ Der Term 36 – 24y entspricht also 20x und kann folglich in der unteren Gleichung anstelle von 20x eingesetzt werden.

20x aus Gleichung 1 (nach der Umformung zu 20x = 36 – 24y)

(**36 - 24y**) + 15y	= 0	¦¦ vereinfachen
36 – 9y	= 0	¦¦ +9y
36	= 9y	¦¦ : 9
4	= y	➔ **y ist also 4.**

Dieses Ergebnis setzen wir jetzt wieder in einer der ursprünglichen Gleichungen oder im Ausdruck für 20x ein, um y zu berechnen.

Das ausgerechnete y anstelle der Variablen einsetzen

Also:	20x	= 36 – 24 • **4**	¦¦ vereinfachen
	20x	= 36 – 96	¦¦ vereinfachen
	20x	= - 60	¦¦ : 20
	x	= (- 3)	➔ **x ist also (-3)**

Lösungsmenge 𝕃 = {-3 / 4} *(in der Lösungsmenge steht immer zuerst x, dann y)*

Fragen / Bemerkungen zu den beiden oben beschriebenen Verfahren:

c) Das Additionsverfahren

Das eigentlich „einfachste“ Verfahren für das Auflösen von Gleichungssystemen ist das Additionsverfahren. Es basiert auf der Idee, dass durch geeignete Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen eine der beiden Variabeln wegfällt und sich die andere somit berechnen lässt.

Das Additionsverfahren gliedert sich in drei Teilschritte:

$$\left| \begin{array}{ll} 2x + 9y & = 57 \\ (-4)x + 5y & = 1 \end{array} \right|$$

1. Schritt: *Eine Variable „auswählen“, die man „weghaben möchte“ und die Gleichungen entsprechend multiplizieren (→* ***Gleiche Koeffizienten vor der gewählten Variablen schaffen****)*

→ Hier z.B. Koeffizient vor y auswählen. Also die obere Gleichung • 5, die untere • 9

$$\left| \begin{array}{ll} 10x + 45y & = 285 \\ (-36)x + 45y & = 9 \end{array} \right|$$

2. Schritt: *Jetzt subtrahieren oder addieren. Dies hängt von den Vorzeichen der ausgesuchten Koeffizienten zusammen*:

10x – (-36x) = 46x

+45y – (+45y) = 0

285 – 9 = 276

gleiche Vorzeichen: man muss subtrahieren
verschiedene Vorzeichen: man muss addieren.

→ ***hier ist der Koeffizient von y gleich (jeweils 45) und dieser hat jeweils ein + davor, also gleiche Vorzeichen. Man muss somit die beiden Gleichungen subtrahieren, z.B. die untere von der oberen subtrahieren****. Dabei ist auf die genauen Vorzeichen zu achten.*

$$\begin{array}{lll} 46x & = 276 & \mid : 46 \\ x & = 6 & \end{array}$$

3. Schritt: *Ausrechnen der einen Variablen und dann der anderen.*

→ das x jetzt in eine der Anfangsgleichungen einsetzen und y ausrechnen.

z.B. in obere Anfangsgleichung

$$\begin{array}{lll} 2 \bullet \mathbf{6} + 9y & = 57 & \mid \text{vereinf.} \\ 12 + 9y & = 57 & \mid -12 \\ 9y & = 45 & \mid : 9 \\ y & = 5 & \end{array}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L}$ = {6 / 5} *(in der Lösungsmenge steht immer zuerst x, dann y)*

<u>Weitere Beispiele zur Verdeutlichung:</u>

<u>Beispiel 1:</u>

$$\left| \begin{array}{ll} 6x - 31y & = 49 \\ (-8x) + 47y & = (-71) \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow \bullet 4 \\ \rightarrow \bullet 3 \end{array} \left| \begin{array}{ll} 24x - 124y & = 196 \\ -24x + 141y & = (-213) \end{array} \right| \downarrow +$$

verschiedene Vorzeichen, also **ADDIEREN**

(-124y) + 141y = +17y und 196 + (-213) = (-17)

$$\begin{array}{lll} 17y & = (-17) & \mid : 17 \\ y & = (-1) & \end{array}$$

<u>→ Einsetzen in Gleichung (z.B. in Gleichung 1)</u>

$$\begin{array}{lll} 6x - 31 \bullet (-1) & = 49 & \mid \text{vereinf.} \\ 6x + 31 & = 49 & \mid -31 \\ 6x & = 18 & \mid :6 \\ x & = 3 & \end{array}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L}$ = {3 / (-1)}

Beispiel 2

$$\left|\begin{array}{ll} 2.5x + y & = 0 \\ 7.5x & = y + 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -y \end{array}$$

In dieser Form ist das Additionsverfahren nicht möglich, da y auf verschiedenen Seiten steht. Zuerst also beide Gleichungen „in gleiche Anordnung setzen“

$$\left|\begin{array}{ll} 2.5x + y & = 0 \\ 7.5x - y & = 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \rightarrow \bullet 6 \\ \rightarrow \bullet 2 \end{array} \left|\begin{array}{llll} 15x & + & 6y & = 0 \\ 15x & - & 2y & = 6 \end{array}\right| \downarrow -$$

gleiche Vorzeichen, also **SUBTRAHIEREN**

(+6y) – (-2y) = +8y und 0 – (+6) = (- 6)

$8y = (-6) \quad | : 8$

$y = (-\frac{6}{8}) = (-0.75)$ → Einsetzen in Gleichung (z.B. in Gleichung 1)

$2.5x + (-0.75) = 0 \quad | \bullet 100$ (HN)

$250x + 75 = 0 \quad | -75$

$250x = -75 \quad | :250$

$x = -0.3$

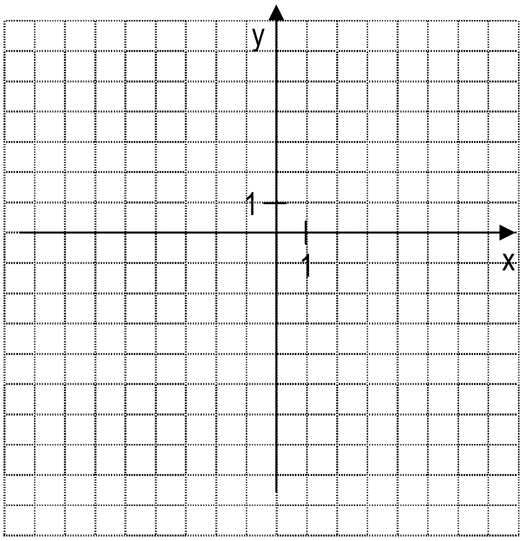
Lösungsmenge $\mathbb{L}$ = {(-0.3) / (-0.75)}

Fragen / Bemerkungen zum oben beschriebenen Verfahren:

Aufgaben „Schneiden von Geraden, Gleichungssysteme“

1. Gegeben ist die Funktion x → y = $\frac{3}{5}$x + (-3)

a) Zeichne den Graph der Funktion im Koordinatensystem ein.
b) Bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Gerade mit der 45°-Gerade durch den Nullpunkt (y = x) rechnerisch
c) Bestimme den Schnittpunkt mit der x-Achse rechnerisch!
d) Bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Gerade mit der Gerade y = 5x +1.4



2. Löse die folgenden Gleichungssysteme auf.

a) $\begin{vmatrix} 5x + 2y = 57 \\ 8x - 2y = 60 \end{vmatrix}$	**b)** $\begin{vmatrix} 4x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 51 \end{vmatrix}$	**c)** $\begin{vmatrix} 4x + y = 30 \\ 3y = x - 1 \end{vmatrix}$	**d)** $\begin{vmatrix} (-4x) + 6y = 4 \\ y - 3x = 2 \end{vmatrix}$

3. Löse die folgenden Gleichungssysteme auf.

a)		b)		c)		d)	
	$\frac{4x}{5} + \frac{y}{3} = -2$		$4x - \frac{5y}{6} = (-\frac{2}{3})$		$3x - 2 = 5y$		$2.4x = 3y - 2$
	$\frac{5y}{3} - \frac{3x}{10} = 33$		$\frac{2x}{5} + 3y = 32$		$2y = 4x - 1$		$1.5y = 3x - 1$

4. Löse die folgenden Satzaufgaben mit Hilfe von Gleichungen (die du aufschreiben musst!)

a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um (-4) und ergeben zusammen die Summe von (-12). Bestimme die beiden Zahlen

b) Die erste Zahl ist 2.5 mal so gross wie die Zweite. Zusammen ergeben sie 63. Bestimme die beiden Zahlen.

c) Die doppelte Summe von zwei Zahlen ist genauso gross wie die neunfache Differenz der beiden, nämlich 36. Bestimme die beiden Zahlen.

d) Wird zum sechsfachen einer Zahl das dreifache einer zweiten Zahl addiert, so erhält man 54. Subtrahiert man dagegen vom dreifachen der zweiten Zahl die Zahl 5, so erhält man gerade die erste Zahl. Bestimme die beiden Zahlen.

e) Addiert man zum Zähler eines Bruchs 17, so erhält man einen Bruch vom Wert $\frac{3}{2}$. Wird aber vom Nenner 18 subtrahiert, erhält man einen Bruch vom Wert 2. Bestimme den ursprünglichen Bruch.